Über transfinite Funktionen. II

Von G. FODOR in Szeged

Sei S eine Menge mit der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ und $cf(\alpha)>0$ (d. h. ω_α sei nicht mit ω konfinal).

Sei M eine Teilmenge von S und nehmen wir an, daß $f(x)$ eine Funktion in M mit Werten aus S und $\delta(x)$ eine Funktion in S mit Werten aus $W(\omega_\alpha)$ ist, so daß $\delta(f(x))<\delta(x)$ für alle $x\in M$ mit $\delta(x)>0$ [und $\delta(f(x))= =\delta(x)$ für $\delta(x)=0$] und $\delta(S)\subseteqq W(\omega_\alpha)$ gilt.

Wir wollen uns mit den folgenden zwei Problemen befassen:

Problem 1. *Wenn $\delta(f(x))<\delta(x)$ $(x\in M, \delta(x)>0)$ gilt und $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist, gibt es dann immer eine Teilmenge E von M derart, daß $\delta(f(E))<\delta(E)$ ist und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(S)$ bildet?*

Problem 2. *Wenn $\delta(f(x))<\delta(x)$ $(x\in M, \delta(x)>0)$ ist, ferner S, M und $\delta(M)$ stationäre Teilmengen von $W(\omega_\alpha)$ sind, gibt es dann immer eine stationäre Teilmenge E von M derart, daß $\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist?*

Bei den Bedingungen des Problems 1 gilt der folgende Satz:

Satz A. *Es gibt eine Teilmenge E von M, so daß $\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes des Verfassers ([2]), welcher sich aus Satz A mit $\delta(x)=x$ für $x\in S$ ergibt: Wenn M eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist, so existiert zu jeder in M definierten Funktion $f(x)$ mit $f(x)<x$ für $x\in M$, $x>0$ (und $f(0)=0$ für $0\in M$) eine stationäre Teilmenge E von M, so daß $f(E)<E$ ist.

Ist $\aleph_\alpha$ regulär, $S\subseteqq W(\omega_\alpha)$ und $\delta(x)$ eine bestimmt divergente Funktion, so gilt bei den Bedingungen des Problems 1 der folgende Satz:

Es gibt ein Element y_0 von S, so daß $\delta(y_0)<\delta(f^{-1}(y_0))$ gilt und $\delta(f^{-1}y_0)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist, wo $f^{-1}y_0=\{x\in S: f(x)=y_0\}$ ist.

Es folgt aus A:

Satz B. *Sei* $\aleph_\alpha$ *regulär und* S *eine zusammengehörige Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$. *Wenn*

a) $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*

b) $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *bestimmt divergent sind,*

so gibt es eine Teilmenge E *von* M, *so daß*

c) $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *und*

d) *für alle* $x \in E$, $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$ *ist.*

Dieser Satz ist (für reguläre $\aleph_\alpha$) eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes von W. NEUMER ([3]), welcher sich aus B mit $\delta(x) = x$ für $x \in S$ ergibt: Sei M eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ und sei in M eine bestimmt divergente Funktion $f(x)$ mit Werten aus $W(\omega_\alpha)$ definiert. Dann gibt es eine stationäre Teilmenge E von M, so daß für alle $x \in E$, $f(x) \geqq x$ ist.

Der Satz B gilt für singuläre $\aleph_\alpha$ nicht. Man kann nämlich in diesem Fall solche bestimmt divergente Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ in M bzw. in S definieren, daß $\delta(S) \subseteqq W(\omega_\alpha)$, $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und für jede $x \in M$, $\delta(f(x)) < \delta(x)$ mit $\delta(x) > 0$ gilt.

Die Antwort auf Problem 2 ist im allgemeinen negativ. Man kann nämlich in $W(\omega_\alpha)$ solche Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ definieren und dann $W(\omega_\alpha)$ in zwei fremde Mengen M und N zerlegen, daß M bzw. $\delta(N)$ stationär und N bzw. $\delta(M)$ nicht stationär sind, ferner $\delta(f(N)) < \delta(N)$ gilt und für alle, mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge M' von M die Menge $\delta(f(M'))$ mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist.

Es erhebt sich noch die Frage: Bei den Bedingungen von B gibt es auch eine stationäre Teilmenge E von M, so daß $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$ für alle $x \in E$ und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist (wenn nur M auch eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist)? Die Antwort ist negativ.

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [4]). Ist Λ eine Ordnungszahl, so bedeute $W(\Lambda)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\xi < \Lambda$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(\Lambda)$ ohne Maximum, so heißen M und N zusammengehörig, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ konfinal mit ν, wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index γ der kleinsten Ordnungszahl ω_γ, mit der α konfinal ist. Eine Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt in $W(\Lambda)$ abgeschlossen, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $< \Lambda$ ist. Eine in $W(\Lambda)$ abgeschlossene, mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt ein Band von $W(\Lambda)$. Eine Teilmenge M von

$W(\Lambda)$ heißt stationär, wenn $W(\Lambda)-M$ kein Band von $W(\Lambda)$ enthält. Eine auf einer Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion φ heißt regressiv, wenn $\varphi(\xi)<\xi$ ist für alle Argumente $\xi\in M$ mit $\xi\geqq 1$ (und $\varphi(0)=0$ im Fall, daß $0\in M$). Eine auf einer mit $W(\Lambda)$ zumammengehörigen Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion $f(\xi)$ mit Werten aus $W(\Lambda)$ heißt bestimmt divergent, wenn es zu jedem $\beta<\Lambda$ ein α gibt, so daß $f(\xi)>\beta$ für $\xi\geqq\alpha$ gilt.

Wir brauchen die folgenden Sätze:

Satz C. *Sei Λ eine Limeszahl mit $cf(\Lambda)>0$ (d. h. Λ ist nicht mit ω konfinal), $\{K_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ $(\tau\leqq\omega_{cf(\Lambda)})$ eine Folge von Typ τ vom nichtleeren und paarweise disjunkten nicht-stationären Teilmengen von $W(\Lambda)$ und x_α das erste Element von $K_\alpha(\alpha<\tau)$, und wir nehmen an, daß die Menge $U=\{x_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ schon nach Größe geordnet ist (d. h. $x_\alpha<x_\beta$ für $\alpha<\beta$). Ist U nicht-stationär und im Falle $\tau=\omega_{cf(\Lambda)}$ mit $W(\Lambda)$ zusammengehörig, so ist die Menge $\bigcup_{\alpha<\tau}K_\alpha$ nicht-stationär* (Vgl. [2]).

Satz D. *Wenn M nicht-stationär ist, so läßt sich auf M eine bestimmt divergente Funktion φ definieren* (vgl. [4], § 9, Satz 2).

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Sei S eine Menge mit der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, $M\subseteq S$, $f(x)$ eine Funktion in M mit $f(M)\subseteq S$, und $\delta(x)$ eine Funktion in S mit $\delta(S)\subseteq$ $\subseteq W(\omega_\alpha)$. Wenn*

1. *$cf(\alpha)>0$ (d. h. ω_α nicht mit ω konfinal ist),*
2. *$\delta(f(x))<\delta(x)$ mit $\delta(x)>0$ (und $\delta(f(x))=0$ für $\delta(x)=0$), und*
3. *$\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist,*

so gibt es eine Teilmenge E von M derart, daß

4. *$\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist, und*
5. *$\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt.*

Wir führen zwei Beweise an:

Beweis 1. Sei $B=\{\beta_\nu\}_{\nu<\omega_{cf(\alpha)}}$ ein Band vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ in $W(\omega_\alpha)$, wobei $\beta_0=0$ ist. Wir bezeichnen mit H_ν die Menge aller $x\in M$, für die $\beta_\nu\leqq\delta(f(x))<\beta_{\nu+1}$: $H_\nu=\{x\in M:\beta_\nu\leqq\delta(f(x))<\beta_{\nu+1}\}$. Offenbar ist $H_\eta\cap H_\tau=0$ für $\eta\neq\tau$. Da B ein Band ist, d. h. $\lim_{\nu<\lambda}\beta_\nu=\beta_\lambda$ für jede Limeszahl $\lambda<\omega_{cf(\alpha)}$ und $\lim_{\nu<\omega_{cf(\alpha)}}\beta_\nu=\omega_\alpha$ ist, so ergibt sich hieraus nach der Definition von H_ν, dass

$$M=\bigcup_{\nu<\omega_{cf(\alpha)}}H_\nu.$$

Sei nun $\{H_{\nu_\xi}\}_{\xi<\tau}$ $(\tau\leqq\omega_{cf(\alpha)})$ die Teilfolge der nicht-leeren Mengen H_ν. Sei Ferner $\delta(H_{\nu_\xi})=H'_{\nu_\xi}$. Offenbar ist

$$\delta(M)=\bigcup_{\xi<\tau}H'_{\nu_\xi}.$$

Sei nun $H''_{\nu_\xi} = H'_{\nu_\xi} - \bigcup_{\zeta<\xi} H'_{\nu_\zeta}$ $(\xi<\tau)$. Man kann offenbar annehmen, daß $H''_{\nu_\xi} \neq 0$ $(\xi<\tau)$. Wenn $\eta \in H''_{\nu_\xi}$ ist, so ist $\eta > \beta_{\nu_\xi}$; es gibt nämlich wegen $H''_{\nu_\xi} \subseteq H'_{\nu_\xi} = \delta(H_{\nu_\xi})$ ein Element $x \in H_{\nu_\xi}$, für das $\delta(x) = \eta$ gilt, folglich ist $\eta = \delta(x) > \delta(f(x)) \geqq \beta_{\nu_\xi}$. Es sei y_{ν_ξ} das erste Element von H''_{ν_ξ} für alle $\xi<\tau$. Wir definieren nun auf der Menge $Y = \{y_{\nu_\xi}\}_{\xi<\tau}$ $(\tau \leqq \omega_{cf(\alpha)})$ eine regressive Funktion ψ:

$$\psi(y_{\nu_\xi}) = \beta_{\nu_\xi}.$$

Man sieht sofort, daß $\psi(\eta) \neq \psi(\nu)$, wenn η und ν zwei verschiedene Elemente von Y sind. So ergibt sich hieraus auf Grund von Satz D, daß die Menge Y nicht-stationär ist. Da $\delta(M)$ stationär ist und

$$\delta(M) = \bigcup_{\xi<\tau} H''_{\nu_\xi} \quad (\tau \leqq \omega_{cf(\alpha)})$$

ist, so existiert nach dem Satz C ein $\xi_0 < \tau$, für das $H''_{\nu_{\xi_0}}$ stationär ist. Folglich ist auch $H'_{\nu_\xi} = \delta(H_{\nu_\xi})$ stationär. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

B e w e i s 2. Sei $U = \{y_\beta\}_{\beta<\omega_{cf(\alpha)}}$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ und

$$M_\beta = \{x \in M : \delta(x) = y_\beta \in U\} \quad (\beta < \omega_{cf(\alpha)}).$$

Offenbar ist $M_\beta \neq 0$ $(\beta<\omega_{cf(\alpha)})$ und $M_\eta \cap M_\nu = 0$ $(\eta \neq \nu)$. Sei m_β ein beliebiges Element von M_β und $M' = \{m_\beta\}_{\beta<\omega_{cf(\alpha)}}$. Die Abbildung $\psi(m_\beta) = \delta(m_\beta) = y_\beta$ ist offenbar eine eineindeutige Abbildung von M' auf U. Wir definieren nun auf der Menge U eine Funktion φ mit der Gleichung

$$\varphi(y_\beta) = \delta(f(m_\beta)).$$

Die Funktion φ ist regressiv, weil $\delta(m_\beta) = y_\beta > \delta(f(m_\beta)) = \varphi(y_\beta)$. Nach dem Satz 2 in [2] gibt es eine stationäre Teilmenge N von U, für die

$$\varphi(N) < N$$

ist. Wir bezeichnen mit E die Menge $\psi^{-1}(N)$. So ergibt sich nach der Definition der Funktion $\varphi(y_\beta) = \varphi(\delta(m_\beta)) = \delta(f(m_\beta))$, daß

$$\varphi(N) = \varphi(\delta(E)) = \delta(f(E));$$

folglich ist

$$\delta(f(E)) < \delta(E).$$

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

S a t z 2. *Sei S eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$, $M \subseteq S$, $f(x)$ eine Funktion in M mit $f(M) \subseteq S$, und $\delta(x)$ eine Funktion in S mit $\delta(S) \subseteq W(\omega_\alpha)$. Wenn*

1. ω_α *regulär* $(\alpha>0)$,
2. $\delta(f(x))<\delta(x)$ *mit* $\delta(x)>0$ [*und* $\delta(f(x))=0$ *für* $\delta(x)=0$],
3. $\delta(x)$ *bestimmt divergent, und*
4. $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist,*

so gibt es ein Element y_0 *von* M, *so daß*

5. $\delta(y_0)<\delta(f^{-1}y_0)$ *und*
6. $\delta(f^{-1}y_0)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *ist.*

Beweis. Nach dem Satz 1 existiert eine Teilmenge E von M, für die $\delta(E)$ stationär ist und $\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt. Da $\delta(x)$ bestimmt divergent ist, so ergibt sich aus $\overline{\overline{\delta(f(E))}}<\aleph_\alpha$, daß $\overline{\overline{f(E)}}<\aleph_\alpha$. Offenbar ist

$$E\subseteqq\bigcup_{x\in f(E)}f^{-1}x$$

und

$$\delta(E)\subseteqq\bigcup_{x\in f(E)}\delta(f^{-1}x).$$

Da $\delta(E)$ stationär ist, ergibt sich wegen $\overline{\overline{f(E)}}<\aleph_\alpha$, daß es ein Element y_0 von $f(E)$ existiert, für die $\delta(f^{-1}y_0)$ stationär ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Aus dem Satz 1 folgt es unmittelbar der folgende

Satz 3. *Sei* S *eine zusammengehörige Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$, $M\subseteqq S$, $f(x)$ *eine Funktion in* M *mit* $f(M)\subseteqq S$, *und* $\delta(x)$ *eine Funktion in* S *mit* $\delta(S)\subseteqq W(\omega_\alpha)$. *Wenn*

1. $\aleph_\alpha(\alpha>0)$ *regulär,*
2. $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
3. $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *bestimmt divergent sind,*

so gibt es eine Teilmenge E *von* M, *so daß*

4. $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *und*
5. *für alle* $x\in E$, $\delta(f(x))\geqq\delta(x)$ *ist.*

Beweis. Seien $M_1=\{x\in M:\delta(f(x))<\delta(x)\}$ und $M_2=\{x\in M: \delta(f(x))\geqq\delta(x)\}$. Offenbar ist $\delta(M)=\delta(M_1)\cup\delta(M_2)$. Nehmen wir nun an, daß der Satz 3 falsch ist. Dann ergibt sich, da $\delta(M)$ stationär ist, daß $\delta(M_1)$ stationär ist. Da $\aleph_\alpha$ regulär ist, so ist M_1 mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig. Nach dem Satz 1 existiert eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge M_1' von M_1, so daß $\delta(M_1')$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und $\delta(f(M_1'))<\delta(M_1')$ gilt. Da $f(x)$ und $\delta(x)$ bestimmt divergent sind, so ergibt sich, daß M_1' nicht mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist, im Widerspruch dazu, daß M_1' mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist.

Für singuläre $\aleph_\alpha$ gilt der Satz 3 nicht. Seien nämlich A, B und C drei abgeschlossene Teilmengen vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ von $W(\omega_\alpha)$, so daß $C<B<A$ gilt und

A mit $W(\omega_\alpha)$ konfinal ist, und seien $\{a_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ und $\{c_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ die zu A, B und C gehörige wachsenden Funktionen, ferner sei $A'=\{a_{\omega\cdot\xi}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ und $A''=\{a_{\omega\cdot\xi+1}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$. Wir definieren nun zwei Funktionen $\delta(x)$ und $f(x)$ in $S=A'\cup A''\cup B\cup C$ bzw. in $M=A'\cup B\cup C$ wie folgt. Es sei $\delta(a_{\omega\cdot\xi})= =a_{\omega(\xi+1)}$, $\delta(a_{\omega\cdot\xi+1})=a_{\omega\cdot\xi}$, $\delta(b_\xi)=a_{\omega\cdot\xi}$, $\delta(c_\xi)=b_\xi$, $f(a_{\omega\cdot\xi})=a_{\omega\cdot\xi+1}$, $f(b_\xi)=c_\xi$ und $f(c_\xi)=c_0$. Offenbar ist $\delta(M)=A'\cup B$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ und $f(M)=A''\cup C$. Man kann leicht einsehen, daß $\delta(x)$ und $f(x)$ bestimmt divergent sind und für alle $x\in M$, $\delta(f(x))<\delta(x)$ gilt.

Wir beweisen nun den

Satz 4. *Es gibt zwei in $W(\omega_\alpha)$ definierte Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ mit Werten aus $W(\omega_\alpha)$, so daß*

1. $\delta(f(x))<\delta(x)$, *mit* $\delta(x)>0$,
2. $\delta(W(\omega_\alpha))$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *und*
3. *für alle stationäre Teilmenge M von $W(\omega_\alpha)$ die Menge $\delta(M)$ nichtstationär ist.*

Beweis. Zu zwei beliebigen Ordnungszahlen γ und β mit $\beta\geqq 1$ existieren zwei eindeutig definierte Zahlen η und ξ derart, daß

$$\gamma=\beta\eta+\xi, \quad \text{wobei} \quad 0\leqq\eta\leqq\alpha,\ 0\leqq\xi<\beta.$$

Sei nun $\beta=5$ und $\gamma\in W(\omega_\alpha)$. Wir definieren die Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ in der folgenden Weise. Sei

$$\begin{aligned}
&\delta(5\eta)=5\eta+4, && f(5\eta)=5\eta+2, \\
&\delta(5\eta+1)=5\eta, && f(5\eta+1)=0, \\
&\delta(5\eta+2)=5\eta+3, && f(5\eta+2)=0, \qquad (\eta<\omega_\alpha) \\
&\delta(5\eta+3)=5\eta+3, && f(5\eta+3)=5\eta+1, \\
&\delta(5\eta+4)=5\eta+4, && f(5\eta+4)=5\eta+2,
\end{aligned}$$

für alle $\eta\in W(\omega_\alpha)$. Offenbar ist

$$\begin{aligned}
&\delta(f(5\eta))=\delta(5\eta+2)=5\eta+3<\delta(5\eta)=5\eta+4, \\
&\delta(f(5\eta+1))=\delta(0)=4<\delta(5\eta+1)=5\eta, \\
&\delta(f(5\eta+2))=\delta(0)=4<\delta(5\eta+2)=5\eta+3, \qquad (\eta>0) \\
&\delta(f(5\eta+3))=\delta(5\eta+1)=5\eta<\delta(5\eta+3)=5\eta+3, \\
&\delta(f(5\eta+4))=\delta(5\eta+2)=5\eta+3<\delta(5\eta+4)=5\eta+4.
\end{aligned}$$

Daraus folgt leicht der Satz 4.

Satz 5. *Es gibt zwei in* $W(\omega_\alpha)$ *definierte Funktionen* $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *mit Werten aus* $W(\omega_\alpha)$, *so daß*

1. $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *bestimmt divergent,*
2. $\delta(W(\omega_\alpha))$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
3. *ist* M *eine Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *und* $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$, *für alle* $x \in M$, *so ist* M *nicht stationär.*

Beweis. Sei

$$\begin{array}{ll} \delta(5\eta) = 5\eta+4, & f(5\eta) = 5\eta+3, \\ \delta(5\eta+1) = 5\eta+3, & f(5\eta+1) = 5\eta, \\ \delta(5\eta+2) = 5\eta+1, & f(5\eta+2) = 5\eta, \qquad (\eta<\omega_\alpha) \\ \delta(5\eta+3) = 5\eta+2, & f(5\eta+3) = 5\eta, \\ \delta(5\eta+4) = 5\eta, & f(5\eta+4) = 5(\eta+1). \end{array}$$

Offenbar ist

$$\delta(f(5\eta)) = \delta(5\eta+3) = 5\eta+2 < \delta(5\eta) = 5\eta+4,$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(f(5\eta+1)) \\ \delta(f(5\eta+2)) \\ \delta(f(5\eta+3)) \end{array}\right\} = \delta(5\eta) = 5\eta+4 > \left\{\begin{array}{l} \delta(5\eta+1) = 5\eta+3, \\ \delta(5\eta+2) = 5\eta+1, \\ \delta(5\eta+3) = 5\eta+2, \end{array}\right.$$

$$\delta(f(5\eta+4)) = \delta(5(\eta+1)) = 5(\eta+1)+4 > \delta(5\eta+4) = 5\eta.$$

Daraus folgt leicht der Satz 5.

Literatur

[1] G. Kurepa, On regressing functions, *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, **4** (1958), 148—156.

[2] G. Fodor, Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **18** (1956), 139—142.

[3] W. Neumer, Kritische Zahlen und bestimmt divergente transfinite Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **70** (1958), 190—192.

[4] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 1, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955).

(Eingegangen am 6. Juni 1960)